

20/04/15

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός : Μια αριθμητική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Παραδείγματα : ① (α) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(n) = e^{in}$

② $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(n) = n^k$, $k \in \mathbb{N}$

③ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(n) = n!$

② (Προσχή στο εμβολιστικό!)

$\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau(n) = \eta \lambda \theta \omicron \varsigma$ φυσικών διαιρετών του $n =$
 $= |\{d \in \mathbb{N} / d|n\}|$

③ $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $\sigma(n) = \acute{\alpha} \theta \rho \omicron \iota \varsigma \alpha$ φυσικών διαιρετών του $n =$
 $= \sum_{d|n} d = \text{~~divisor~~ } d_1 + d_2 + \dots + d_{\tau(n)}$

④ $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(n) = \tau \omicron \eta \lambda \theta \omicron \varsigma$ των θετικών ακεραίων $k:$

Συνάρτηση Euler!!
 $= \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n \\ (k, n) = 1 \end{array} \right\} = |\{k \in \mathbb{N} / 1 \leq k \leq n, (k, n) = 1\}|$

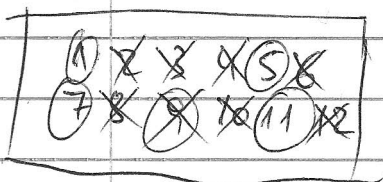
⑤ $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{αν } n > 1 \text{ κ' } \exists p: \text{πρώτος } p \in p^e / n \\ (-1)^k, & \text{αν } n = p_1 \dots p_k: \text{πρωτογενής αριθμός του } n. \end{cases}$

Συνάρτηση του Möbius

Παράδειγμα: $\boxed{n=12} \rightarrow$ οι διαιρέτες του 12 είναι: 1, 2, 3, 4, 6, 12

① $T(12) = 6$, ② $G(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$

③ $\varphi(12) = 4$ ④ $\mu(12) = 0$, διότι $2^2 | 12$.
 $12 = 2^2 \cdot 3$



Παράδειγμα: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$

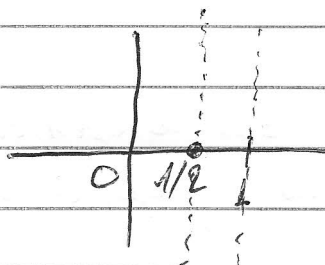
Η συνάρτηση αυτή επεκτείνεται σε μια συνάρτηση

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ουσιαστικά αν $\text{Re}(s) > 1$.

→ συνάρτηση f του Riemann

Η f μηδενίζεται για $s = -2, -4, -6, -8, \dots$ (αρνητικές πύκνες της f).

Εγκυρία του Riemann: Όλες οι μη-αρνητικές πύκνες της f ικανοποιούν $\text{Re}(s) = 1/2$.



$A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{αριθμητική συνάρτηση}\}$

Έστω $f \in A$. Τότε ορίζεται η αριθμητική συνάρτηση $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\mu \in F(n) = \sum_{d|n} f(d) = f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_{T(n)})$

Παράδειγμα : Αν $\boxed{n=12}$, τότε : $F(12) = \sum_{d|12} f(d) =$
 $= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(6) + f(12) =$

Παρατήρηση : $\left[\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \right]$

$\left\{ d \in \mathbb{N} \mid d|n \right\} = \left\{ \frac{n}{d} \in \mathbb{N} \mid d|n \right\}$

Παράδειγμα : $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : T(n) = \eta \lambda \theta \omicron \varsigma \text{ φυσικών διαμερών του } n =$
 $= \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} f(d)$, όπου $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f(n) = 1$.

$\longleftrightarrow$

~~Παράδειγμα~~ Παράδειγμα : Αν $k=0, 1, 2, 3, \dots$, τότε ορίζουμε αριθμική
 συνάρτηση

$g_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, ~~ορίζουμε~~ $g_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

- Αν $k=0$, τότε $g_0 = T$

- Αν $k=1$, τότε $g_1 = \sigma$

Ορισμός : Έστω $f, g \in A$, $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε το εναλλακτικό
 γινόμενο (ή γινόμενο Dirichlet) των f, g ορίζεται να είναι
 η αριθμική συνάρτηση :

$f * g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) =$
 $= \sum_{\alpha \beta = n} f(\alpha) g(\beta)$

Παράδειγμα : $(f * g)(6) = \sum_{\alpha \cdot b = 6} f(\alpha) \cdot g(b) = f(1)g(6) + f(2)g(3) +$
 $+ f(3)g(2) + f(6)g(1)$

↪

Παράδειγμα : $(\varphi * T)(12) = \varphi(1)T(12) + \varphi(2)T(6) + \varphi(3)T(4) +$
 $+ \varphi(4)T(3) + \varphi(6)T(2) + \varphi(12)T(1) =$

$= 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 28.$

↪

Ορίστε μια αριθμητική συνάρτηση :

$$\varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ : Έχουμε ορίσει μια πράξη $*$ στο σύνολο A των αριθμητικών συναρτήσεων $*$: $A^{\mathbb{N}} \rightarrow A$, $(f, g) \mapsto f * g$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

- ① $\forall f, g \in A : f * g = g * f$ (Μεταθετική ιδιότητα)
- ② $f, g, h \in A : (f * g) * h = f * (g * h)$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)
- ③ $\forall f \in A : f * \varepsilon = f = \varepsilon * f$ ("Υναρξη ουδ. στοιχείου")

Απόδειξη : ① Θ.δ.ο. $(f * g)(n) = (g * f)(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$(f * g)(n) = \sum_{\alpha \cdot b = n} f(\alpha) \cdot g(b) = \sum_{b \cdot \alpha = n} g(b) \cdot f(\alpha) = (g * f)(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

→ $\boxed{f * g = g * f}$

② 0.S.O. $[(f * g) * h](n) = [f * (g * h)](n), \forall n \in \mathbb{N}$.

$$[(f * g) * h](n) = \sum_{r+s=n} (f * g)(r) h(s) = \sum_{r+s=n} \left(\sum_{k+l=r} f(k) g(l) \right) h(s) =$$

$$= \sum_{k+l+s=n} f(k) g(l) h(s) \quad ①$$

$$[f * (g * h)](n) = \sum_{k+l=n} f(k) (g * h)(l) = \sum_{k+l=n} f(k) \left(\sum_{r+s=l} g(r) h(s) \right) =$$

$$= \sum_{k+r+s=n} f(k) g(r) h(s) \quad ②$$

Από ①, ② προκύπτει το ζητούμενο. $\Rightarrow$ ~~$[(f * g) * h](n) = [f * (g * h)](n)$~~

$$\Rightarrow [(f * g) * h](n) = [f * (g * h)](n) = \forall n \in \mathbb{N}$$

③ $(f * \varepsilon)(n) = \sum_{\alpha \cdot b = n} f(\alpha) \varepsilon(b) = f(n) \varepsilon(1) + \sum_{\substack{\alpha \cdot b = n \\ b > 1}} f(\alpha) \varepsilon(b) = f(n)$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Από $f * \varepsilon = f = \varepsilon * f$ (ταυτότητα) (η "*" είναι αντιμεταθετική)

Πρόβλημα: Αν $f \in A$. $\exists g \in A : f * g = \varepsilon = g * f$??

Απάντηση: Όχι.

Παρατήρηση: Έστω ότι για να αντιστρέψουμε, $\exists g \in A$ έτσι ώστε:

$$f * g = \varepsilon = g * f$$

Τότε: $(f * g)(1) = \varepsilon(1) = 1 \Rightarrow \sum_{\alpha \cdot b = 1} f(\alpha) \cdot g(b) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(1) \cdot g(1) = 1 \Rightarrow \boxed{f(1) \neq 0}$$